2.3.6 Nerovnice v podílovém tvaru II

Předpoklady: 2303, 2304

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{(3x-1)(x^2+1)}{(x+1)(2-x)(1-3x)} \leq 0$.

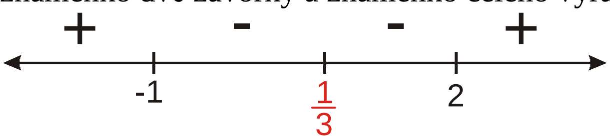
Podmínky: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, $1-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$.

Člen (x^2+1) je vždy kladný $\Rightarrow$ nebudeme se s ním dále zabývat, znaménko neovlivňuje.

Přepíšeme si nerovnici do součinového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu.

$$\underset{\nearrow}{\overset{-}{(3x-1)}}\ \underset{\nearrow}{\overset{-}{\frac{1}{(x+1)}}} \cdot \underset{\searrow}{\overset{+}{\frac{1}{(2-x)}}} \cdot \underset{\searrow}{\overset{+}{\frac{1}{(1-3x)}}} \leq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod $\frac{1}{3}$ si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se v něm tedy nezmění.



$K = \left(-1;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};2\right)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2+3}{1-3x} < 0$.

Podmínka: $1-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$.

Čitatel zlomku je vždy kladný $\Rightarrow$ neovlivňuje znaménko $\Rightarrow$ řešíme vlastně nerovnici

$1-3x < 0$.

$1 < 3x$

$x > \frac{1}{3}$ $\qquad\qquad\qquad$ $K = \left(\frac{1}{3};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Připomínám studentům, že tabulka je na tento příklad trochu zbytečně velký kanón.

Př. 3: Vyřeš nerovnici: $\frac{9}{x+2} \geq 3$.

Problém: Na pravé straně není nula $\Rightarrow$ převedeme 3 na levou stranu a vyrobíme jediný zlomek.

$\frac{9}{x+2} \geq 3$

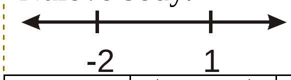
$\frac{9}{x+2} - 3 \geq 0$

$\frac{9-3(x+2)}{x+2} \geq 0$

$\frac{3-3x}{x+2} \geq 0$ Teď už jde o příklad ze začátku hodiny.

Podmínka: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$.

Nulové body:



	$(-\infty;-2)$	$(-2;1)$	$(1;\infty)$
$3-3x$	+	+	-
$x+2$	-	+	+
$\frac{3-3x}{x+2}$	-	+	-

$K = (-2;1\rangle$

Základem předchozího postupu bylo vytvoření jediného zlomku $\Rightarrow$ metodě říkáme **převedení na podílový tvar**.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\frac{9}{x+2} \geq 3$ tím, že odstraníš vynásobením zlomek v zadání.

Podmínka: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$.

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(x+2)$, může být kladný i záporný $\Rightarrow$ musíme rozdělit řešení do dvou větví.

$x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$

(násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$\frac{9}{x+2} \geq 3 \quad / \cdot (x+2)$

$9 \leq 3(x+2)$

$9 \leq 3x+6$

$3 \leq 3x$

$1 \leq x$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 1;\infty)$, počítáme s čísly $x < -2$, v intervalu není žádné takové.

$K_1 = \emptyset$

$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

(násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává)

$\frac{9}{x+2} \geq 3 \quad / \cdot (x+2)$

$9 \geq 3(x+2)$

$9 \geq 3x+6$

$3 \geq 3x$

$1 \geq x$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;1\rangle$, počítáme s čísly $x > -2 \Rightarrow$ získáme interval $(-2;1\rangle$.

$K_2 = (-2;1\rangle$

$K = K_1 \cup K_2 = (-2;1\rangle$

Základem metody bylo odstranění zlomku $\Rightarrow$ říkáme jí **metoda odstranění zlomku**.
Nevýhoda metody = nutnost dělit výpočet do dvou větví.

Pedagogická poznámka: Metodu mají studenti probranou, ale připomenutí je většinou nutné. Mnoho kolegů ji vynechává a nutí studenty k převádění na podílový tvar (je fakt, že většina si podílový tvar raději vybírá sama). Já sám na jejím zvládnutí trvám, považuji jí za jeden z nejobecněji používaných postupů na střední škole a beru ji jako investici do budoucna (zejména pro absolutní hodnoty).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je obtížný ne myšlenkou, ale zdlouhavostí a složitostí. Většina chyb při řešení vyplývá z toho, že se studenti „ztratí“. Snažím se při opravování chyb upozorňovat zejména na to, že musí vědět, kde vlastně jsou a co počítají. Každopádně jeho cena je právě v jeho složitosti, v tom, že studenti musí několikrát přejít do „podprogramu“, něco spočítat a pak to použít dále (hlavně, když jej počítají odstraňováním zlomku).
Proto je důležité, aby ho všichni spočítali pod dozorem a nemá cenu ho nechávat na doma.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $x \geq \frac{6}{5-x}$ převedením na podílový tvar i odstraněním zlomku.

a) převedení na podílový tvar (na pravé straně chceme nulu, aby platila úvaha o znaménkách)
Podmínka: $5-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

$$x \geq \frac{6}{5-x}$$

$$x - \frac{6}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{x(5-x)}{5-x} - \frac{6}{5-x} \geq 0$$

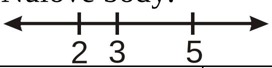
$$\frac{5x - x^2 - 6}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{-\left(x^2 - 5x + 6\right)}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{-(x-3)(x-2)}{5-x} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{5-x} \leq 0$$ Teď už můžeme použít tabulku.

Nulové body:



	$(-\infty;2)$	$(2;3)$	$(3;5)$	$(5;\infty)$
$x-3$	-	-	+	+
$x-2$	-	+	+	+

$5-x$	+	+	+	-
$\frac{(x-3)(x-2)}{5-x}$	+	-	+	-

$K=\langle 2;3\rangle\cup(5;\infty)$

b) odstranění zlomku

Podmínka: $5-x\neq 0\Rightarrow x\neq 5$.

$x\geq\frac{6}{5-x}$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(5-x)$, může být kladný i záporný $\Rightarrow$ musíme rozdělit řešení do dvou větví.

$(5-x)<0\Rightarrow x>5$

(násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$x\geq\frac{6}{5-x}\qquad /\cdot(5-x)$

$x(5-x)\leq 6$

$5x-x^2\leq 6$

$-(x^2+5x-6)\leq 0$

$x^2-5x+6\geq 0$

$(x-3)(x-2)\geq 0$ Nerovnice v součinovém tvaru $\Rightarrow$ děláme tabulku.

Nulové body: 2 3 .

	$(-\infty;2)$	$(2;3)$	$(3;\infty)$
$x-3$	-	-	+
$x-2$	-	+	+
$(x-3)(x-2)$	+	-	+

Zdá se, že řešením jsou intervaly $(-\infty;2\rangle$ a $(5;\infty)$, počítáme s čísly $x>5$ $\Rightarrow$ $K_1=(5;\infty)$.

$(5-x)>0\Rightarrow x<5$

(násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává)

$x\geq\frac{6}{5-x}\qquad /\cdot(5-x)$

$x(5-x)\geq 6$

$5x-x^2\geq 6$

$-(x^2+5x-6)\geq 0$

$x^2-5x+6\leq 0$

$(x-3)(x-2)\leq 0$ Nerovnice v součinovém tvaru $\Rightarrow$ děláme tabulku.

Nulové body: 2 3 .

	$(-\infty;2)$	$(2;3)$	$(3;\infty)$
$x-3$	-	-	+
$x-2$	-	+	+
$(x-3)(x-2)$	+	-	+

Zdá se, že řešením je interval $\langle 2;3\rangle$, počítáme s čísly $x<5$ $\Rightarrow$ $K_2=\langle 2;3\rangle$.

$K=\langle 2;3\rangle\cup(5;\infty)$

Poznámka: Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat úvahou. Když do nerovnice $x\geq\frac{6}{5-x}$ dosadíme hodně velká kladná čísla, získáme na levé straně velké kladné číslo a na pravé malé záporné $\Rightarrow$ nerovnice vyjde a její řešení tedy musí obsahovat interval s plus nekonečnem.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+1}\geq 0$.

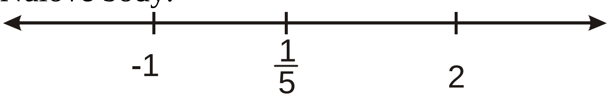
Podmínky: $x-2 \Rightarrow x\neq 2$, $x+1 \Rightarrow x\neq -1$

Problém: Levou stranu tvoří součet zlomků $\Rightarrow$ musíme je sečíst, abychom na levé straně mohli vytvořit součiny.

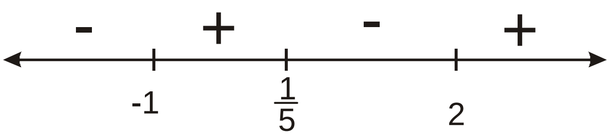
$$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x+3+2x-4}{(x-2)(x+1)}\geq 0$$

$$\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)}\geq 0$$

Nyní je nerovnice v klasickém podílovém tvaru, řešíme jako předchozí příklady.
Nulové body:



Použijeme zrychlenou metodu z řešení nerovnic v součinovém tvaru. V intervalu $(-\infty;-1)$ jsou všechny závorky záporné $\Rightarrow$ záporný je pak i celý zlomek. V dalších intervalech se znaménka pravidelně střídají.



$K=\left(-1;\frac{1}{5}\right\rangle \cup (2;\infty)$

Př. 7: Petáková:
strana 12/cvičení 3 d) e) f)
strana 14/cvičení 19 b) c) e)

Shrnutí: Nerovnice s neznámou ve jmenovateli a s nenulovou pravou stranou buď převedeme na podílový tvar, nebo řešíme odstraněním zlomku.